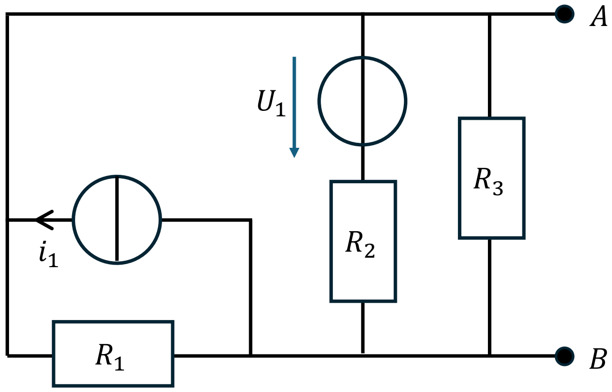
Photonic Systems Laboratory

Sciences et technologies de l'électricité 2025 – Série 3

SOLUTIONS

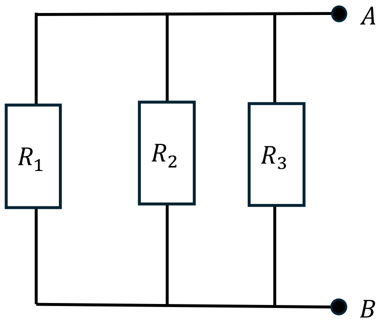
Exercice 1

Nous souhaitons déterminer l'équivalent de Norton du circuit suivant :



(a) Exprimer la résistance équivalente vue des bornes A et B.

On éteint les sources, on obtient le circuit suivant :

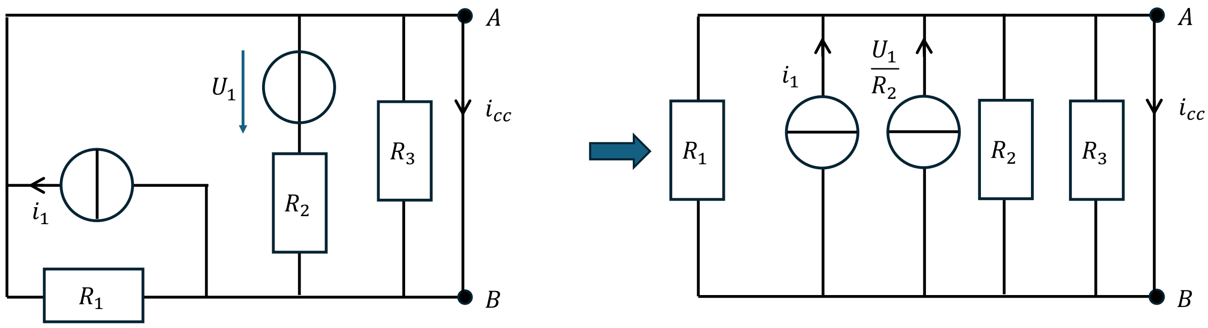


Vues des bornes A et B, les trois résistances sont en parallèle :

$$\boldsymbol{R_i} = \frac{\boldsymbol{R_1 R_2 R_3}}{\boldsymbol{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}$$

(b) Déterminer le courant de court-circuit entre A et B. Aide : vous pouvez transformer la source de tension en source de courant équivalente.

Nous devons analyser le circuit suivant et trouver i_{cc} :



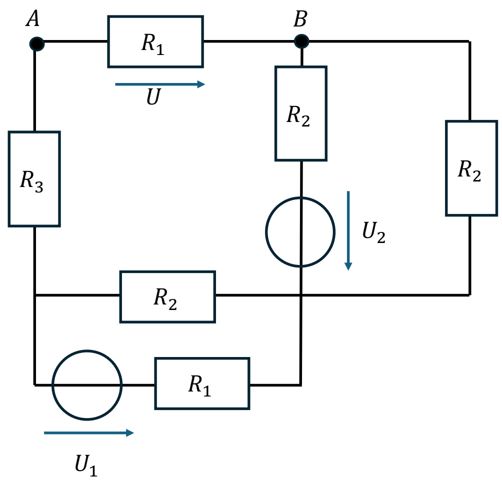
On remarque alors que toutes les résistances sont court-circuitées. On a donc par la loi de Kirchhoff des nœuds :

$$\boldsymbol{i_{cc}} = \boldsymbol{i_1} + \frac{\boldsymbol{U_1}}{\boldsymbol{R_2}}$$

Exercice 2

On considère le circuit ci-dessous. Calculer la tension U avec les méthodes suivantes :

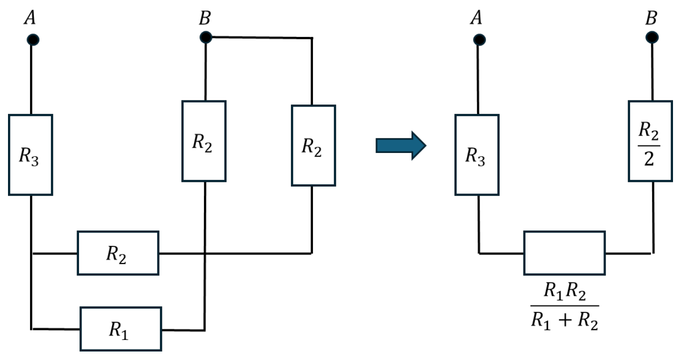
- Théorème de Thévenin
- Théorème de Norton



$U_1 = 10\ \mathrm{V}$
$U_2 = 20\ \mathrm{V}$

$R_1 = 3\ \Omega$
$R_2 = 4\ \Omega$
$R_3 = 20\ \Omega$

On commence par trouver la résistance interne, qui est la même pour Thévenin et Norton. On éteint les sources de tension et en retirant la résistance entre A et B, qui est notre charge :

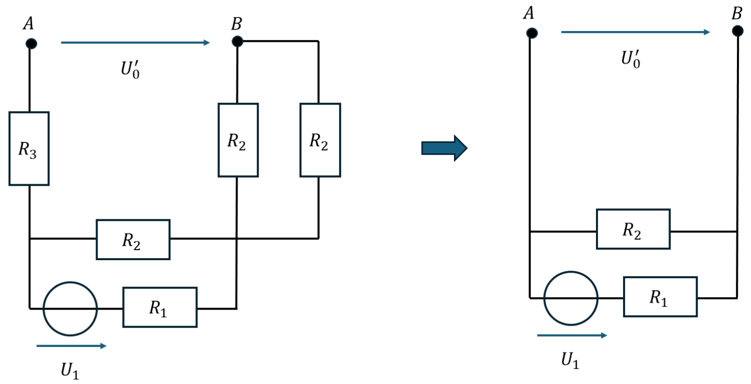


On trouve alors la résistance interne R_{eq}:

$$R_{eq} = R_3 + \frac{R_2}{2} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 23.7\ \Omega$$

Pour Thévenin, on calcule la tension à vide. On peut utiliser le principe de superposition :

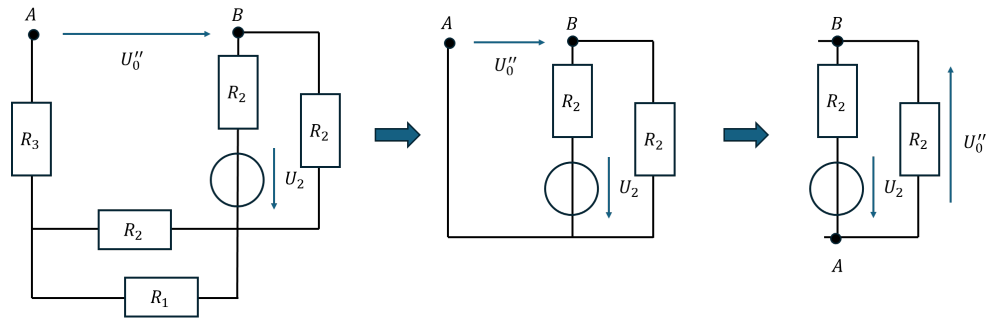
<u>Circuit a :</u>



En appliquant le diviseur de tension on trouve :

$$U_0' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 = 5.7 \text{ V}$$

<u>Circuit b</u> :



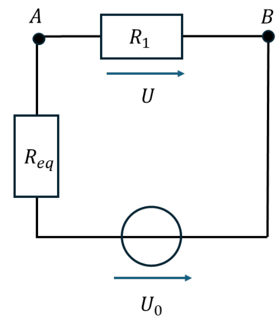
En appliquant le diviseur de tension on trouve :

$$U_0'' = -\frac{R_2}{R_2 + R_2} U_2 = -10 \text{ V}$$

Par le principe de superposition :

$$U_0 = U_0' + U_0'' = -4.3 \text{ V}$$

Le circuit initial est donc :

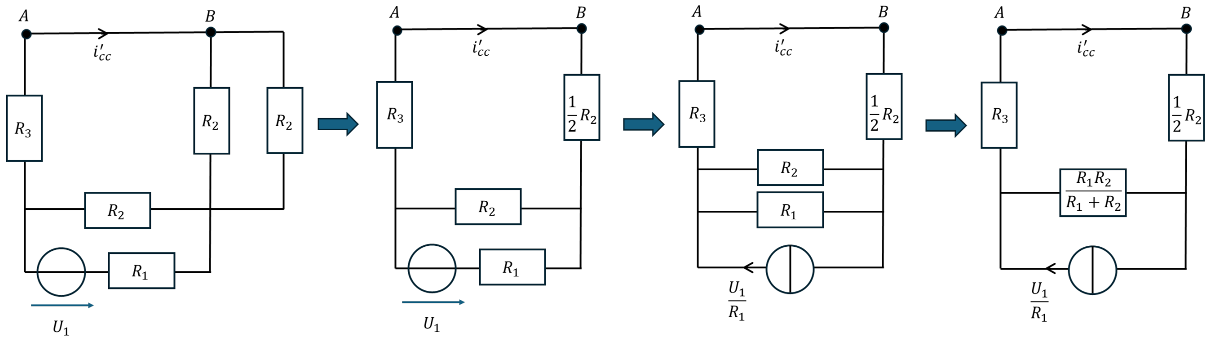


Par le diviseur de tension on trouve :

$$\boldsymbol{U = \frac{R_1}{R_1 + R_{eq}} U_0 \approx -0.48 \text{ V}}$$

Pour Norton, on calcule le courant de court-circuit. De nouveau nous allons utiliser le principe de superposition.

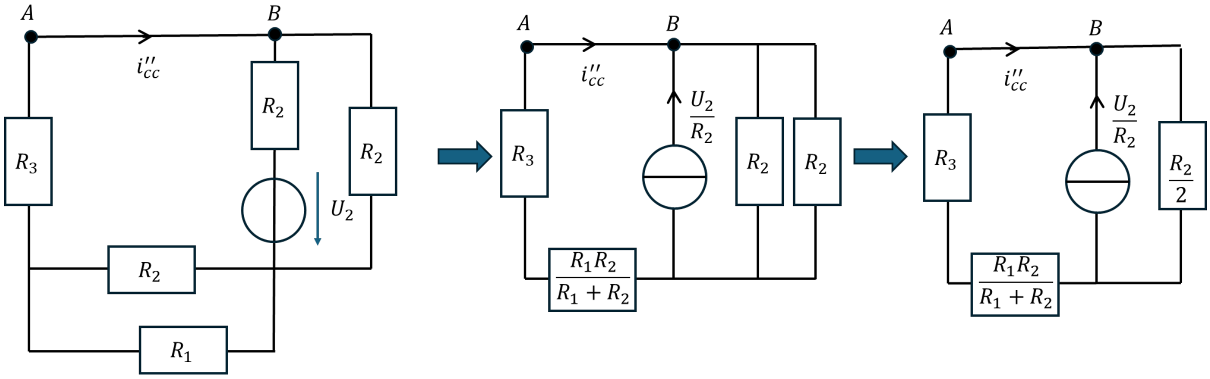
<u>Circuit a</u> : Ici nous avons fait également une transformation source de tension - source de courant. Il est aussi possible de faire l'analyse du 2eme circuit avec les lois de Kirchhoff et d'Ohm



Nous appliquons un diviseur de courant sur le dernier circuit :

$$i'_{cc} = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_2}{2}} \frac{U_1}{R_1} = 0.24 \text{ A}$$

<u>Circuit b :</u> De nouveau nous avons eu recourt à une transformation source de tension – source de courant.



Nous appliquons un diviseur de courant sur le dernier circuit (Attention au sens !) :

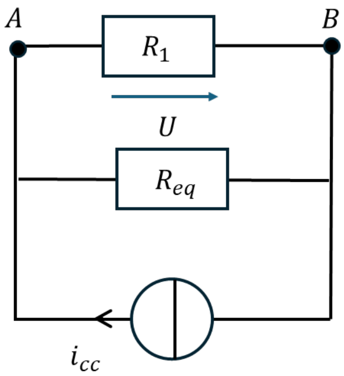
$$i''_{cc} = -\frac{\frac{R_2}{2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_2}{2}} \frac{U_2}{R_2} = -0.42 \text{ A}$$

Par le principe de superposition :

$$\boldsymbol{i_{cc} = i'_{cc} + i''_{cc} = -0.18 \text{ A}}$$

Vérifions à partir de la loi d'Ohm : $U_0 = R_{eq} i_{cc} \approx -4.3 \text{ V}$. On obtient bien la même tension de Thévenin.

Le circuit initial est donc :

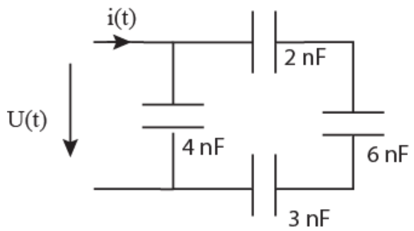


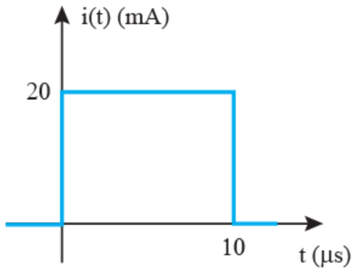
En remarquant que R_1et R_{eq} sont en parallèle, on peut appliquer la loi d'Ohm sur la résistance équivalente :

$$\boldsymbol{U = \frac{R_1 R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} i_{cc} = -0.48 \text{ V}}$$

Exercice 3

Considérez le circuit ci-dessous. Tous les condensateurs sont initialement déchargés. A temps $t = 0$ s, un courant $i(t)$ de 20 mA est appliqué pendant 10 μs.





(a) Quelle est la capacité équivalente à l'agencement des 4 condensateurs ?

Les condensateurs de 2, 6 et 3 nF sont en série, nous pouvons les combiner en un seul condensateur de valeur Ceq1 :

$$C_{eq1} = \left(\frac{1}{2.10^{-9}} + \frac{1}{4.10^{-9}} + \frac{1}{6.10^{-9}}\right)^{-1} = 1.10^{-9}$$

Ce condensateur est ensuite en parallèle avec celui de 4 nF : la capacité équivalente est donc de 5 nF.

(b) Quelle est la tension $u(t)$ à $t = 10$ µs ?

Nous utilisons l'expression :

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')dt'$$

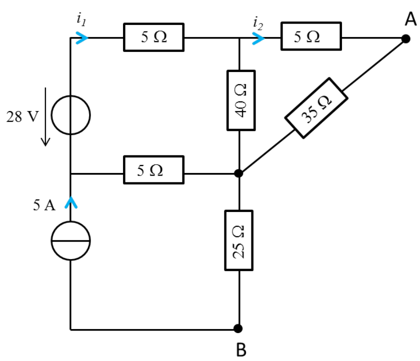
Comme tous les condensateurs sont initialement déchargés nous avons que $u(t_0) = 0$ V. avec $t_0 = 0$ s. Donc :

$$u(10us) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{10.10^{-6}} 20.10^{-3}dt' = \frac{(10.10^{-6})(20.10^{-3})}{5.10^{-9}} = 40$$

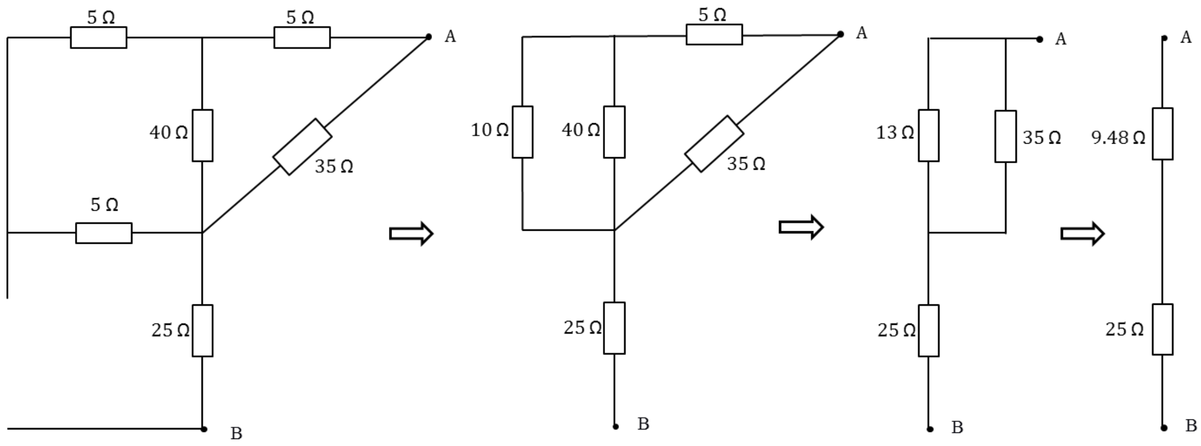
La tension $u(t)$ à $t = 10$ µs est de 40 V.

Exercice 4

Le circuit ci-contre peut alimenter une charge R_L se connectant entre les bornes A et B.



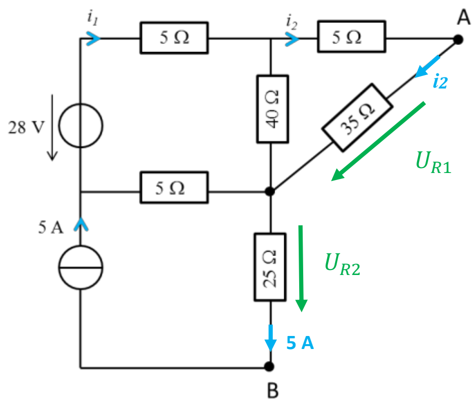
(a) Calculez la résistance équivalente de Thévenin vues des bornes A et B (si cela vous aide, redessinez le circuit à chaque simplification)



On obtient que $\boldsymbol{R_{eq}} = \mathbf{34.48\ \Omega}$

(b) Exprimez la tension circuit ouvert de Thévenin U_{AB} en fonction de la seule inconnue i_2.

On pose les tensions qui nous intéressent :

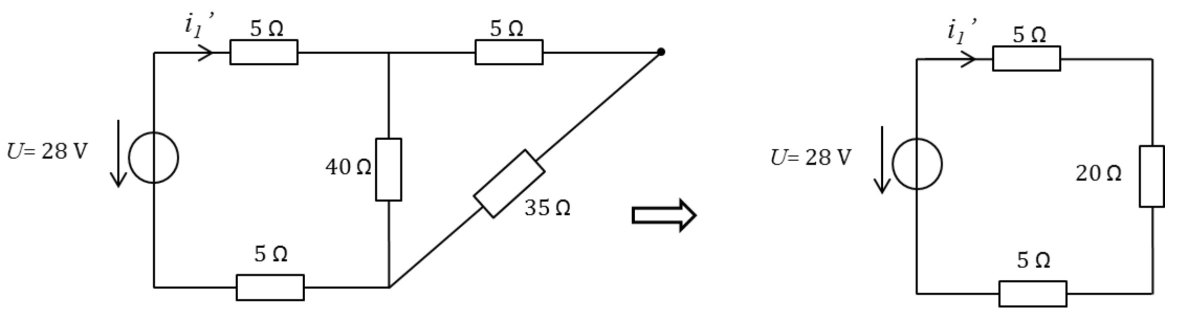


Par la loi des mailles :

$$U_{AB} = U_{R1} + U_{R2}$$
$$U_{AB} = 35 i_2 + 25(5) = 35 i_2 + 125$$

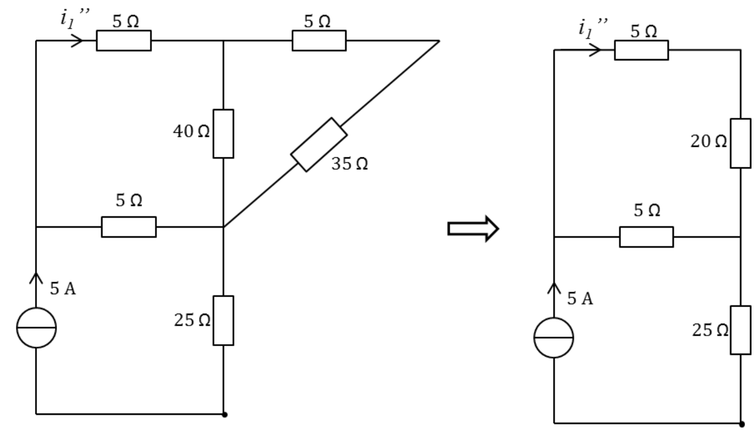
(c) En utilisant le principe de superposition, calculez i_1. En déduire ensuite i_2 (aide : diviseur de courant) et la tension circuit ouvert de Thévenin U_{AB}.

Circuit (a) : seulement la source de tension. La source de courant devient un circuit ouvert, plus de courant dans la résistance de 25 Ω .



Par la loi des mailles et la loi d'Ohm : $i_1' = \frac{28}{5+20+5} = \frac{28}{30}$ A

Circuit (B) : seulement la source de courant



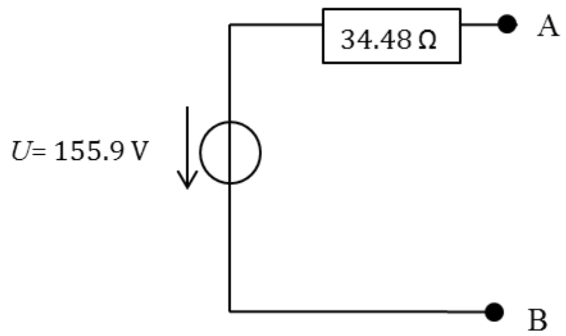
Par le diviseur de courant : $i_1'' = \frac{5}{5+5+20} 5 = \frac{25}{30}$ A

Par le principe de superposition : $i_1 = i_1' + i_1'' = \frac{53}{30}$ A

Diviseur de courant sur le circuit original : $i_2 = \frac{40}{40+5+35} i_1 = \frac{53}{60}$ A

On a donc $\boldsymbol{U_{AB} = 35\frac{53}{60} + 125 = 155.9\ \mathrm{V}}$

(d) Dessinez le circuit équivalent de Thévenin aux bornes A et B.



(e) Quelle doit être la valeur de la charge R_L pour obtenir l'adaptation de puissance ? Calculer la puissance transmise maximale dans ce cas.

Nous devons avoir : $\boldsymbol{R_L = R_{eq} = 34.48\ \Omega}$

Dans ce cas la puissance est : $\boldsymbol{P_L = \frac{U_{AB}^2}{4R_L} = 176.22\ \mathrm{W}}$

(f) Calculez le courant circulant dans la charge quand l'adaptation de puissance est satisfaite.

Par la loi des mailles et d'Ohm : $\boldsymbol{i_L = \frac{U_{AB}}{2R_L} = 2.26\ \mathrm{A}}$

Exercice 5

Un condensateur C_1 de 150 pF est complètement chargé à l'aide d'une source de tension de telle sorte que le la tension aux bornes du condensateur soit de 60 V. La source de tension est alors déconnectée. Le condensateur C_1 est ensuite connecté en parallèle avec un deuxième condensateur initialement déchargé.

Trouvez la capacité du deuxième condensateur si la tension aux bornes de C_1 prend une valeur de 45 V. (Aide : pensez à la charge accumulée)

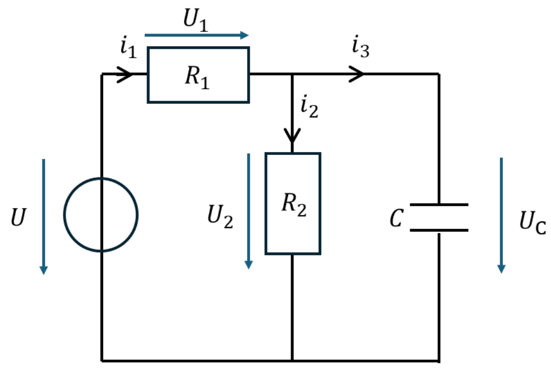
Lorsque le condensateur est chargé nous pouvons en déduire la quantité de charge accumulée car $Q = CU$. Donc $Q = (150 \cdot 10^{-12})60 = 9 \cdot 10^{-9} C$

Quand les deux condensateurs sont connectés en parallèle, la quantité de charge est redistribuée mais reste constante. Nous connaissons la tension aux bornes des condensateurs U, nous pouvons calculer C_2 en se basant sur la quantité de charge :

$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U$

$C_2 = (Q - C_1 U)/U = 50 \cdot 10^{-12}$ F ou 50 pF

Exercice 6



Nous souhaitons déterminer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.

(a) En appliquant les lois de Kirchhoff, établir l'équation différentielle de $U_C(t)$.

Nous avons posé toutes tensions et courants comme sur le schéma ci-dessus.

Les lois des mailles : $U_1 + U_2 = U$ et $U_2 = U_C$

Loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i_3$

Loi d'Ohm : $U_1 = R_1 i_1, U_2 = R_2 i_2$

Loi du condensateur : $i_3 = C \frac{dU_c}{dt}$

On obtient : $U_1 = R_1(i_2 + i_3) = R_1 \left(\frac{U_C}{R_2} + C \frac{dU_C}{dt}\right)$

Puis :

$$U = U_1 + U_2 = R_1 \left(\frac{U_C}{R_2} + C \frac{dU_C}{dt}\right) + U_C$$

$$U = \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} U_C + R_1 C \frac{dU_C}{dt}$$

$$\boldsymbol{\frac{dU_C}{dt} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_2 R_1 C} U_C = \frac{1}{R_1 C} U}$$

(b) Déterminer la constant de temps de charge du condensateur et sa tension en régime stationnaire.

En utilisant la réponse précédente on identifie la constante de temps comme :

$$\boldsymbol{\tau = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} C}$$

La tension en régime stationnaire s'obtient avec la solution particulière sous forme de constante (dérivée dans le temps à zéro) :

$$\frac{(R_1 + R_2)}{R_2 R_1 C} U_{C\_stat} = \frac{1}{R_1 C} U$$

$$\boldsymbol{U_{C\_stat} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U}$$

(c) On souhaite trouver le comportement du condensateur par une méthode différente :

a. Calculer le circuit équivalent de Thévenin vu des bornes du condensateur (en enlevant le condensateur)

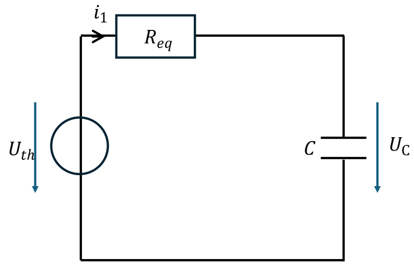
On commence par calculer la résistance équivalente vue des bornes du condensateur et avec la source éteinte. On remarque que les 2 résistance sont en parallèle. On obtient :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

La tension à vide est la tension aux bornes de la résistance R_2 (pas de courant i_3). Donc

$$U_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

Le circuit équivalent est donc (une fois le condensateur rebranché) :



b. A partir de l'équivalent établir l'équation différentielle de $U_C(t)$. Vérifier que les résultats sont identiques.

En utilisant la loi des mailles et l'équation du condensateur , on obtient :

$$U_{th} = R_{eq} i_1 + U_c = R_{eq} C \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R_{eq} C} U_C = \frac{1}{R_{eq} C} U_{th}$$

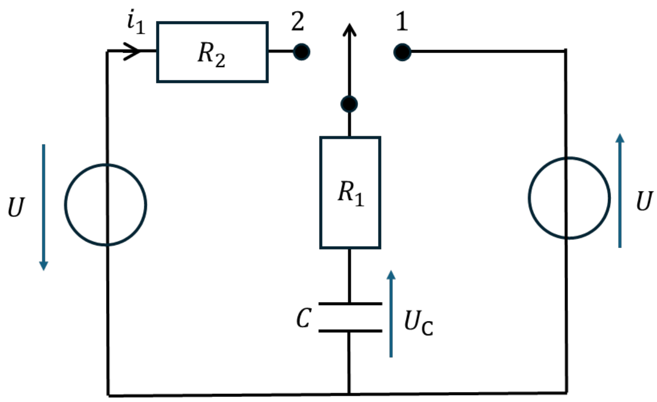
$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} U_C = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

$$\boldsymbol{\frac{dU_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} U_C = \frac{1}{R_1 C} U}$$

Nous obtenons bien les mêmes équations.

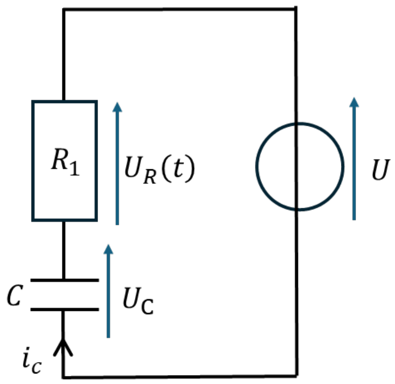
Exercice 7

On considère le circuit ci-dessous, où $U = 1\ \mathrm{V}$, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $C = 1\ \mathrm{pF}$. Initialement, l'interrupteur est ouvert et $U_C = 0\ \mathrm{V}$.



(a) A $t = 0$ on commute l'interrupteur en position 1 : en utilisant la loi des mailles, établir l'équation différentielle en $U_C(t)$. Trouver la tension aux bornes du condensateur $U_C(t)$ pour $t > 0$, puis la tension aux bornes de R_1. Quelle est la constante de temps τ_{c1}?

Le circuit pour $t > 0$ est donné ci-dessous. Nous introduisons le courant $i_c(t)$ tel que la loi des sens ***soit satisfaite pour le condensateur.*** Nous posons ensuite la tension $U_R(t)$.



Loi des mailles:

$$U = U_R(t) + U_C(t)$$

$$U = R_1 i_C(t) + U_C(t)$$

$$U = R_1 C \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t)$$

$$\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C} U_C(t) = \frac{1}{R_1 C} U$$

On extrait la constante de temps pour cet état qui est $\tau_{C1} = R_1 C = 100\ \mathrm{ps}$

L'équation différentielle a une solution de la forme : $U_C(t) = U + k \exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right), t > 0$

Nous utilisons la condition initiale au temps $t = 0$ pour trouver k:

$$U_C(0) = 1 + k = 0 \text{ donc } k = -1$$

La tension aux bornes du condensateur est donc :

$$U_C(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{100 \cdot 10^{-12}}\right), t > 0$$

Connaissant $U_C(t)$ nous pouvons en déduire la tension $U_R(t)$.

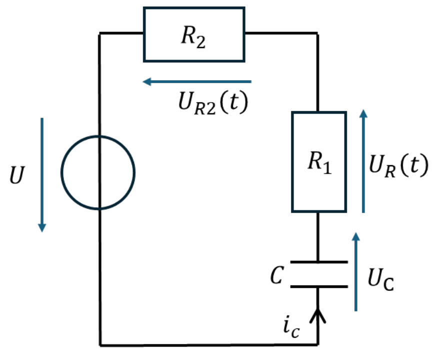
$$U_R(t) = U - U_C(t)$$

$$U_R(t) = \exp\left(-\frac{t}{100 \cdot 10^{-12}}\right), t > 0$$

A noter que pour $t < 0$ la tension aux bornes de R_1 est nulle car il n'y a pas de courant qui circule.

(b) A $t = 100$ ps on commute l'interrupteur en position 2 : en utilisant la loi des mailles, établir l'équation différentielle en $U_C(t)$. Trouver la tension aux bornes du condensateur $U_C(t)$ pour $t > 100$ ps, puis la tension aux bornes de R_1. Quelle est la constante de temps τ_{c2}?

Le circuit pour $t > 100$ ps est donné ci-dessous. $i_c(t)$ tel que la loi des sens ***soit satisfaite pour le condensateur.*** Nous posons ensuite la tension $U_R(t)$ et $U_{R2}(t)$



Loi des mailles:

$$U + U_R(t) + U_C(t) + U_{R2}(t) = 0$$

$$U + (R_1 + R_2)i_c(t) + U_C(t) = 0$$

$$U + (R_1 + R_2)C\frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t) = 0$$

$$\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}U_C(t) = -\frac{U}{(R_1 + R_2)C}$$

La constante de temps pour ce circuit est donnée par $\tau_{C1} = (R_1 + R_2)C = 150$ ps

L'équation différentielle a une solution $U_C(t) = -U + k\exp\left(-\frac{t}{(R_1+R_2)C}\right), t > 100$ ps

La condition initiale est maintenant celle à $t = 100$ ps. La tension$U_C(t)$ doit être continue à lorsque l'interrupteur est commuté. Elle est obtenue en utilisant la première partie à la question:

$$U_R(t) = \exp\left(-\frac{t}{100 \cdot 10^{-12}}\right), t > 0$$

$$U_C(100\text{ ps}) = 1 - \exp\left(-\frac{100 \cdot 10^{-12}}{100 \cdot 10^{-12}}\right)$$
$$U_C(100\text{ ps}) = 0.632$$

Cela doit aussi être satisfait pour la nouvelle équation puisque la tension ne peut pas avoir de discontinuité:

$$U_C(100\text{ ps}) = -U + k\exp\left(-\frac{100 \cdot 10^{-12}}{150 \cdot 10^{-12}}\right) = 0.632$$

On obtient $k = 3.178$

La tension aux bornes du condensateur est donc :

$$U_C(t) = -1 + 3.178\exp\left(-\frac{t}{150 \cdot 10^{-12}}\right), t > 100\text{ ps}$$

A noter que vous pouviez également faire un changement de variable et écrire cette équation sous la forme :

$$U_C(t) = -1 + 1.632\exp\left(-\frac{t - 100 \cdot 10^{-12}}{150 \cdot 10^{-12}}\right), t > 100\text{ ps}$$

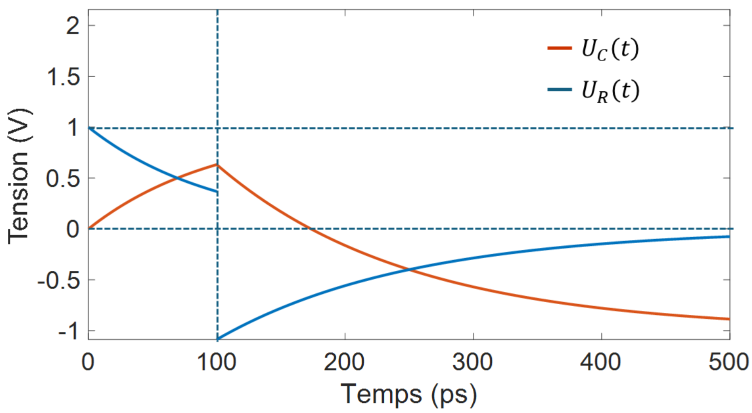
Connaissant $U_C(t)$ nous pouvons en déduire le courant :

$$i_C(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{3.178}{150}\exp\left(-\frac{t}{150.10^{-12}}\right), t > 100\,ps$$

La tension aux bornes de R_1 est donnée par la loi d'Ohm :

$$U_{R1}(t) = R_1 i(t) = -2.118\exp\left(-\frac{t}{150.10^{-12}}\right), t > 100\,ps$$

(c) Dessiner la tension aux bornes du condensateur $U_C(t)$ et aux bornes de R_1 en fonction du temps pour $t > 0$ (inclure les deux transitions de l'interrupteur). Bien indiquer les valeurs de temps et tension sur les axes.



Exercice 8

Lorsque la tension aux bornes d'un condensateur est trop élevée, le diélectrique à l'intérieur est soumis à un très fort champ électrique. Au-dessus d'une certaine valeur du champ, appelée champ disruptif du diélectrique, ce dernier va devenir conducteur de manière irréversible (phénomène de claquage) et la composant va être détruit.

Un condensateur fait de titanate de baryum ($\varepsilon_r = 4000$, champ disruptif $4 \cdot 10^6\ \mathrm{V/m}$) possède des électrodes de surface $S = 2.8 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{cm}^2$ S et une capacité de 100 pF. Calculer sa tension de claquage en considérant ce condensateur idéal de sorte que le champ à l'intérieur est uniforme.

On sait que la tension de claquage est atteinte lorsque le champ électrique dans l'isolant du condensateur est égal au champ disruptif. Soit $U_{claquage} = E_d \cdot d$, d'après la formule permettant de connaître le champ électrique en fonction de la tension entre les électrodes.

Il est donc nécessaire de connaître *d*, en sachant que :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{C} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 4000 \cdot 2.8 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}} = 0.99\ mm$$

Finalement, on trouve que $U_{claquage} = E_d \cdot d = 4 \cdot 10^6 \cdot 0.99 \cdot 10^{-3} = \mathbf{3960\ V.}$